СВЕРХСВЕТОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В (ПОЛУ)КЛАССИЧЕСКОЙ ОТО

С. В. Красников*

Аннотация

Рассматривается возможность сверхсветовых перемещений „нетахионных“ (т. е. движущихся с мгновенной скоростью $v < c$) тел в рамках общей теории относительности. Обсуждается запрет, предположительно налагаемый на такие перемещения квантовой теорией поля. Демонстрируется несостоятельность этого запрета в общем случае.

Ключевые слова: сверхсветовые перемещения, причинность, кротовина, квантовое неравенство.

1. СВЕРХСВЕТОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

«Скорость тела, состоящего из обычной („нетахионной“) материи не может превышать скорость света». Если под „скоростью“ понимать „мгновенную скорость“, т. е. скорость в точке, то это утверждение *верно*, но *тавтологично* — если найдется тело, летящее быстрее света, его придется назвать тахионом. На практике, однако, под скоростью в данном случае понимается нечто иное (нечто вроде эффективной средней скорости, как мы увидим). Утверждение оказывается *содержательным* и *неверным*.

Считается, что расстояние между Землей и Денебом составляет $d =$ 1500 световых лет. Допустим, корабль сумел долететь от Земли до Денеба за время $T_1 < 1500$ лет, или — ниже мы увидим, что это совершенно разные допущения — сумел долететь до Денеба и вернуться на Землю за $T_2 < 3000$ лет (в обоих случаях время измеряется по земным часам). Представляется вполне законным назвать такое перемещение „сверхсветовым“,

*Главная астрономическая обсерватория РАН

поскольку $d/T_1 > c$. Как мы увидим чуть ниже на конкретных примерах, сверхсветовое — в этом смысле — перемещение возможно, в принципе, даже для тела, движущегося с мгновенной скоростью $v < c$. Это связано с природой величины d: в общем случае в ОТО едва ли можно придать разумный смысл понятию „расстояния между телами“, а когда это оказывается возможным, расстояние вовсе не обязано совпадать с тем, что выше было обозначено d. Утверждение «расстояние между Землей и Денебом составляет 1500 световых лет» следует, строго говоря, понимать следующим образом. Есть область вселенной N, включающий в себя часть мировой линии Земли, часть мировой линии Денеба и некоторые из соединяющих их изотропных геодезических. Область эта (приблизительно) плоская и мы можем рассматривать ее и как часть реального пространства-времени (с его, возможно, очень сложной геометрией), и как часть *фиктивного* пространства Минковского, в котором мировым линиям Земли и Денеба соответствуют параллельные прямые. Понятие расстояния между такими прямыми вводится очевидным образом. Именно это расстояние и составляет 1500 световых лет.

Как явствует из вышесказанного, сверхсветовые перемещения удобней обсуждать не в терминах скоростей, а сравнивая реальное пространство-время с пространством Минковского [1].

Опеределение. Пусть C — времениподобный цилиндр $\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leqslant r_0^2$ в пространстве Минковского $\mathbb{L}^4$. Область U глобально гиперболического пространства M, а иногда и само M, будем называть *лазом* (соответствующий английский термин — shortcut), если существует изометрия $\varkappa\colon\ (M - U) \to (\mathbb{L}^4 - C)$ и пара точек $p, q \in (M - U)$ таких, что

$$p \preccurlyeq q, \qquad \varkappa(p) \not\preccurlyeq \varkappa(q)$$

(напомню обозначения: $a \preccurlyeq b$ означает, что из точки a до b можно провести направленную в будущее причинную кривую; ниже нам еще понадобятся $J^+(a) \equiv \{x | a \preccurlyeq x\}$, $J^-(a) \equiv \{x | x \preccurlyeq a\}$ и $J^\pm(\gamma) \equiv \bigcup_{a\in\gamma} J^\pm(a)$). Итак, M — лаз, если его можно получить из пространства Минковского заменой цилиндра $C \subset \mathbb{L}^4$ на нечто такое (а именно, на U), что точки, пространственноподобно разделенные в $\mathbb{L}^4$, становятся причинно связанными. Путешествие сквозь лаз из p в q как раз и есть сверхсветовое перемещение, т. к. тело попадает туда, куда свет (будь это пространство Минковского) дойти бы не успел.

Пример 1. „Пузырь Алькубиерре“. На плоскости $\mathbb{R}^2$ рассмотрим метрику

$$\mathrm{d}s^2 = \Omega^2(r)(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2), \qquad r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$$

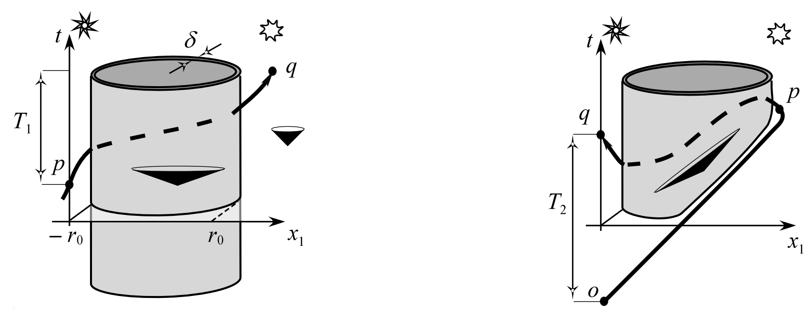
где Ω — монотонная функция такая, что

$$\Omega\big|_{r>r_0} = 1, \quad \Omega\big|_{r<(1-\delta)r_0} = \Omega_0 = const, \qquad 0 < \delta, \Omega_0 \ll 1.$$

Все пространство, кроме колечка $1 - \delta < r/r_0 < 1$ является плоским и, более того, при $r > r_0$ оно неотличимо от Евклидовой плоскости. Тем не менее, точка ($x = -r_0$, $y = 0$) намного ближе ($\approx 2\Omega_0 r_0$ против $2r_0$) к диаметрально противоположной точке ($x = r_0$, $y = 0$), чем в случае Евклидовой плоскости. Естественное 4-мерное обобщение (ср. [2])

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \Omega^2(r)(\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) \qquad r \equiv \Big(\sum_{i=0}^{3} x_i^2\Big)^{1/2}$$

очевидно является лазом [см. рис. 1(а)].



(а) (б)

Рис. 1: (а) Световой конус внутри лаза раскрыт (в данных координатах) в $1/\Omega_0$ раз шире, чем в пространстве Минковского. Поэтому пунктирная линия временеподобна. (б) „Искусственный" лаз. o предшествует ему.

Пример 2. „Труба Красникова". Пусть M — это $\mathbb{R}^4$ с метрикой [3]

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x_1 - \mathrm{d}t)(k\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}t) + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2, \tag{1}$$

где $k = k(r)$ — монотонная функция такая, что

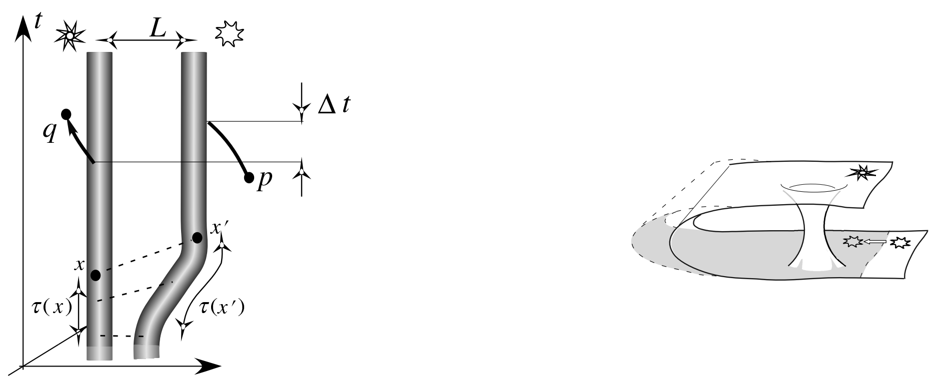
$$k\big|_{r>r_0} = 1, \quad k\big|_{r<(1-\delta)r_0} = k_0 = const, \qquad -1 < k_0 < 0.$$

Пространство, как и в предыдущем примере, искривлено только в сферическом слое толщины δ. Главное — и, как мы увидим ниже, важное — отличие состоит в том, что путешествие теперь может закончиться *еще до того как началось*, см. рис. 1(б). Эффект этот чисто координатный (время измеряется в разных точках) и с нарушением причинности не связан. Действительно, рассмотрим функцию $F = t + \frac{k_0-1}{2}x_1$ и любую непродолжимую причинную кривую $\lambda(\zeta)$, где ζ — натуральный параметр во вспомогательной евклидовой метрике

$$\mathrm{d}s_E^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2, \qquad \omega_0 \equiv \mathrm{d}t + \tfrac{k-1}{2}\mathrm{d}x_1, \quad \omega_1 \equiv \tfrac{k+1}{2}\mathrm{d}x_1$$

(она отличается от метрики (1) только знаком при ω_0^2). Нетрудно доказать, что $|\mathrm{d}F/\mathrm{d}\zeta| > (1 + k_0)/2$, откуда ясно, что λ должна рано или поздно пересечь (единственный раз) поверхность $F = 0$. Последняя, т. о., является поверхностью Коши M и, следовательно (см. [4, предложение 6.6.3]), M глобально гиперболично. Наличие требуемых p и q очевидно, и мы заключаем, что M — лаз.

Пример 3. „Кротовина“. Вырежем из пространства Минковского два тонких цилиндра, см. рис. 2(а), склеим границы получившихся дыр и „сгладим“ метрику в окрестности склейки так, чтобы устранить возникший там разрыв производных. Получившееся пространство [5, 6], называют



(а) (б)

Рис. 2: Кротовина с меняющимся во времени расстоянием между входами. Концы пунктирных линий склеены.

кротовиной (в англоязычной литературе — wormhole). Часто так же называют и его пространственноподобное сечение, рис. 2(б). Описанная процедура неоднозначна, т. к. точки на границах цилиндров можно отождествлять по-разному. Обычно склеивают точки с равным τ, где τ есть (лоренцево) расстояние до некоторой плоскости — скажем, $t = 0$ — измеренное вдоль образующей цилиндра. Такое правило нужно, если мы хотим описывать кротовину, эволюционирующую, как показано на рис. 2(б): расстояние между входами во „внешнем“ пространстве меняется, а форма кротовины (и, соответственно, ее „длина“) — нет. Очевидно, если при $t > 0$ один вход покоится, а другой движется, то у склеиваемых точек окажется разное t („парадокс близнецов“). Поэтому, кротовину можно (в частности) использовать и для перемещений, которые „кончаются раньше, чем начались“, см. рис. 2(а). Как и в прошлом примере, это не обязательно нарушает причинность: если $\Delta t < L$, пространство остается глобально гиперболичным и, как следствие, — лазом.

Пригодность лазов для межзвездных перелетов различна. Будем говорить, что точка $o \in M$ *предшествует* лазу, если $\varkappa$ может быть продолжена на $M - J^+(o)$, и назовем лаз *вечным*, если ему не предшествует никакая точка. Очевидно, в отсутствие тахионов лаз можно интерпретировать как созданный по решению, принятому в p, только если p этому лазу предшествует. Вечный же лаз создать вообще нельзя, а можно только *найти*.

Все три рассмотренных выше лаза, будучи статическими, являются, конечно, вечными. В случае кротовины это обстоятельство принципиально — в глобально гиперболическом пространстве-времени кротовина не может ни появиться, ни исчезнуть (см. [4, предложение 6.6.8]). В то же время, два первых лаза легко модифицировать так, чтобы они перестали быть вечными. Достаточно отменить при $t, r < r_0$ условия наложенные на Ω и k, а при $t < r$ потребовать, чтобы Ω и k были равны 1. Таким лазам предшествует, например, начало координат.

К сожалению, точка p, фигурирующая в определении лаза, не может этому лазу предшествовать (иначе q — в противоречии с определением — лежала бы в $M - J^+(p)$, поскольку $\varkappa(q)$ лежит в $\mathbb{L}^4 - J^+[\varkappa(p)]$). Т. о., когда решение лететь к Денебу принято, строить лаз уже поздно в том смысле, что T_1 это не уменьшит. Что, однако, не обесценивает идею такого строительства — лазом еще не поздно воспользоваться для уменьшения T_2 (см. рис. 1(б)), а это, похоже, для практических нужд гораздо важнее.

2. КВАНТОВЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

До сих пор мы обсуждали возможность преодоления „светового барьера“ с чисто геометрической точки зрения. Однако, в рамках ОТО геометрия вселенной и свойства заполняющего ее вещества связаны уравнениями Эйнштейна $G_{ik} = 8\pi T_{ik}$ (здесь и ниже по умолчанию подразумевается система единиц, в которой $G = \hbar = c = 1$), и можно поставить вопрос о том, какими свойствами должен обладать тензор энергии-импульса (ТЭИ) материи, заполняющей лаз. Оказывается, во всех рассмотренных выше примерах есть точки, где $G_{ik}t^i t^k < 0$ для некоторого времениподобного вектора $\boldsymbol{t}$ и, значит, нарушается т. н. слабое энергетическое условие (СЭУ), требующее, чтобы

$$T_{ik}t^i t^k \geqslant 0 \qquad \forall\, \boldsymbol{t}\colon\ t^i t_i \leqslant 0,$$

т. е. чтобы плотность энергии была неотрицательна в любой системе отсчета. Хотя строгое доказательство пока найдено только для кротовин [7], похоже, что нарушение СЭУ присуще *любому* лазу. Грубо говоря, если бы плотность энергии всюду была неотрицательна, то естественно было бы ожидать, что на больших расстояниях (т. е. в Ньютоновском пределе) гравитационное поле убывало бы, как $1/r^2$, а не исчезало совсем, как того требует определение лаза.

В классической физике плотность энергии предположительно не может быть отрицательной (поэтому вещество, нарушающее СЭУ называют *экзотическим*) и т. о. для сверхсветовых перелетов остаются две возможности:

1). Можно исследовать ситуации, в которых нарушения СЭУ связаны просто с тем, что мы приписали нулевую кривизну области N. Тем самым мы *заранее* посчитали отсутствующими любые источники энергии и, в том числе, нужные для обеспечения (соблюдающего СЭУ) сверхсветового перелета. Чтобы последовательно учесть наличие потенциальных источников энергии (скажем, звезд, лежащих чуть в стороне от прямой Земля–Денеб), понятие лаза придется обобщить (это не трудно) так, чтобы M сравнивалось не с $\mathbb{L}^4$, а с неким — тоже искривленным — M'. Такого рода лазы, действительно, не требуют экзотического вещества (см. Приложение в [1]), но вопрос о том, насколько эффективными в этом случае они могут быть, остается открытым.

2). Можно также учесть квантовые поправки к уравнениям Эйнштейна. В полуклассической гравитации [8, 9] последние приобретают вид

$$G_{ik} = 8\pi T^{\mathrm{C}}_{ik} + 8\pi\, T_{ik},$$

где T^{C}_{ik} — вклад классической материи, а второй член — это ренормированное среднее значение ТЭИ рассматриваемого поля. Известно, что T_{ik} может нарушать СЭУ (классический пример — эффект Казимира). Эта, вторая возможность с точки зрения квантовой теории поля гораздо интересней, на ней мы и остановимся.

Пусть $\gamma(\tau)$ — мировая линия свободно падающего наблюдателя и τ — его собственное время. Рассмотрим „усредненную с χ“ плотность энергии

$\rho = T_{\hat{0}\hat{0}}$ (шляпки над индексами тензора означают, что его компоненты определяются в ортонормированном базисе, с нулевым ортом ∂_τ)

$$\rho_\chi(\tau_0) \equiv \int_{-\infty}^{-\infty} \rho(\tau)\chi(\tau - \tau_0)\,\mathrm{d}\tau,$$

где интеграл берется вдоль γ, а функция χ нормирована условием

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \chi(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1.$$

В случае скалярного (с минимальной связью) и электромагнитного полей в d-мерном пространстве Минковского ($d = 2, 4$) доказано [10], что для функций специального вида, а именно $h(\tau) \equiv \pi^{-1}\Delta/(\tau^2+\Delta^2)$, справедливо неравенство

$$\rho_h > -\Delta^{-d}. \tag{2}$$

Факт этот часто интерпретируется как математическое выражение некоего „принципа дополнительности“, связывающего нарушения СЭУ с промежутком времени Δ, в течение которого его можно наблюдать: чем сильнее нарушение (т. е. чем больше $|\rho|$), тем меньше Δ. Исходя из идеи, что искривленное пространство является „почти плоским“, если рассматривается достаточно маленькая область, Форд и Роман предположили [11], что подобный принцип верен универсально — т. е. для любых квантовых состояний любых свободных* полей в любом пространстве-времени. Конкретно, если усреднение производится с функцией f:

$$f \in C^\infty, \qquad \operatorname{supp} f \in (\tau_1, \tau_2), \qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f'(\tau)]^2/f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \lesssim 1, \tag{3}$$

то, предположительно [12], должно выполняться неравенство

$$\rho_f \gtrsim -\mathcal{T}^{-d} \qquad \forall\, \mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}_R, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{T} \equiv |\tau_2 - \tau_1|, \qquad \mathcal{T}_R \equiv \big(\max|R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}}|\big)^{-1/2}.$$

Максимум здесь берется по всем компонентам и всем $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$. Физический смысл „квантового неравенства“ (4) примерно тот же, что и (2), а условие на $\mathcal{T}$ должно гарантировать малость рассматриваемой области (иногда его приходится дополнять неким топологическим требованием, см. раздел 3.1).

*Что для взаимодействующих полей он заведомо неверен, видно уже из того, что ему не подчиняется (даже в плоском пространстве) эффект Казимира, в котором $\rho(t) = const < 0$.

Выбор функций (3) вызван тем, что именно для таких f неравенство (4) удалось доказать (при $d = 2$ для безмассового скалярного поля в состоянии конформного вакуума [13, 14]).

Квантовое неравенство (КН) позволяет весьма эффектно продемонстрировать „нефизичность" лазов, рассмотренных выше [15]†. Ход рассуждений приблизительно таков. Пусть p такая точка, что через нее проходит времениподобный геодезический сегмент $\gamma(\tau)$ длины $\mathcal{T}_R$, вдоль которого ρ отрицательна и примерно постоянна. Предположим,

$$\max |R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}}(p)| \lesssim \max |T_{\hat{k}\hat{l}}(p)| \approx -\rho(p) \tag{5}$$

(во всех трех лазах действительно можно найти p, удовлетворяющую предъявленным требованиям). Применяя (4) с $\mathcal{T} = \mathcal{T}_R$ к γ, получим

$$|\rho_f| < \mathcal{T}_R^{-4} = \left(\max |R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}}|\right)^2 \lesssim \rho^2(p) \tag{6}$$

или

$$|\rho(p)| \gtrsim \rho_f/\rho(p) \approx 1. \tag{7}$$

Т. о. плотность энергии в p должна быть Планковской! В рассмотренных выше примерах можно представить себе, что СЭУ нарушается только в тонком — скажем, Планковской толщины — сферическом слое. Однако, если мы хотим использовать лаз для перемещения макроскопических объектов (с характерным размером l), то естественно ожидать, что диаметр слоя будет $\sim l$ и объем $V \sim \pi l_{\mathrm{Pl}} l^2$. Поэтому при $l \sim 1\,\text{м}$ „суммарное количество отрицательной энергии", заключенное даже в столь тонком слое будет чудовищным:

$$|E^-_{\mathrm{tot}}| = -\rho V \sim \pi \left(\frac{2,2\times 10^{-8}\,\text{кг}}{(1,6\times 10^{-35}\text{м})^3}\right) 1\,\text{м}^2 (1,6\times 10^{-35}\text{м}) \approx 3\times 10^{62}\,\text{кг}. \tag{8}$$

Очевидно, каков бы ни был (несколько туманный) физический смысл величины E^-_{tot}, этот результат следует интерпретировать как полную невозможность создания такого рода лазов даже в очень отдаленном будущем. Сам по себе этот факт не слишком важен в случае пространств из примеров 1, 2. Действительно, оба пространства выбиралась настолько простыми, насколько позволяла задача, для которой они были придуманы: иллюстрация *принципиальной* совместимости сверхсветовых перемещений с запретом локального превышения скорости света. Можно предполагать поэтому, что нежелательные свойства требующихся для них источников являются следствиями именно этой простоты. Проблема, однако, в том, что рассуждения, приведшие к (8), представляются настолько общими, что кажется, будто они справедливы для *любого* лаза. Это означало бы, что квантовое неравенство исключает сверхсветовые перемещения.

†На самом деле, в этих работах рассматривались чуть более сложные метрики.

3. УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ ОГРАНИЧЕНИЙ

Общность рассуждений, обосновывающих (8), в действительности несколько обманчива. Существует ряд ситуаций, в которых КН, даже если оно справедливо, не требует, тем не менее, справедливости (8). Рассмотрим некоторые из них (подробности см. [1, 16]).

3.1 Нелокальные эффекты

Как известно [9], у безмассового скалярного поля на цилиндре

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 \qquad x = x + L.$$

есть квантовое состояние, в котором $\rho = -\frac{\pi}{6}L^{-2}$. Такая плотность энергии очевидно противоречит (4), поскольку в данном случае $\mathcal{T}_R = \infty$. Возможно, это связано с тем, что на масштабах $\gtrsim L$ цилиндр — хотя он и плоский — все же „недостаточно похож“ на часть пространства Минковского. Т. о. условие на величину $\mathcal{T}$ в (4) *необходимо дополнить* еще каким-нибудь требованием, которое бы учитывало такую возможность. Можно, в частности‡, ограничить действие КН геодезическими γ настолько короткими, что $J_\gamma \equiv J^+(\gamma) \cap J^-(\gamma)$ имеет топологию шара (как это имеет место в $\mathbb{L}^4$). Такое условие, однако, выводит из-под действия КН наиболее интересную разновидность кротовин. Действительно, пусть λ — любой времениподобный геодезический отрезок в горловине статической (для простоты) кротовины. Можно показать, что при $\Delta t \to L$ и *неизменной геометрии горловины* на λ обязательно найдутся точки, соединимые *негомотопной* λ причинной кривой (и значит J_λ уж точно не шар). Т. о., КН оказывается тем менее ограничительным, чем „эффективнее“ кротовина с точки зрения межзвездных перелетов.

3.2 Искривление пространства удаленными телами

Важную роль при выводе (7) играло неравенство в (5), выражающее идею, что кривизна в p возникает за счет наличия в p экзотического вещества. С учетом уравнений Эйнштейна обсуждаемое неравенство приобретает вид

$$\max |R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}}(p)| \lesssim \max |G_{\hat{k}\hat{l}}(p)| \tag{9}$$

‡Это обобщение условия, которое Фьюстер [14] использует в случае $d = 2$. Других приемлемых (т. е., как минимум, координатно независимых) вариантов подобного условия пока не предлагалось.

и *на первый взгляд* должно выполняться всегда при отсутствии специальных симметрий или подгонок параметров. Это, однако, не верно. Кривизна в точке определяется (среди прочего) тензором Вейля:

$$R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}} = C_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}} - g_{\hat{\imath}[\hat{n}}R_{\hat{m}]\hat{\jmath}} - g_{\hat{\jmath}[\hat{m}}R_{\hat{n}]\hat{\imath}} - \tfrac{1}{3}g_{\hat{\imath}[\hat{m}}g_{\hat{n}]\hat{\jmath}}R.$$

Т. о. основания ожидать, что (9) справедливо, есть только, когда

$$P \equiv \max|C_{\hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{m}\hat{n}}|/\max|R_{\hat{\imath}\hat{\jmath}}| \lesssim 1,$$

а это, *как правило*, не выполняется. В частности, в *любой* искривленной, но пустой области (например, в окрестности любой звезды) $P = \infty$.

3.3 Неоднородное распределение материи

Попробуем воспроизвести вывод (8), опустив условие постоянства $\rho(\tau)$. Тогда для оправдания последнего неравенства в (6) придется потребовать $|\rho(p)| \approx \max_\gamma|\rho|$. С другой стороны, для (7) нужно $|\rho_f| \gtrsim |\rho(p)|$. Значит для получения таким способом (8) существенно, чтобы $|\rho_f| \approx \max_\gamma|\rho|$, т. е.

$$|\rho_f| \gtrsim |\overline{\rho}|, \qquad \overline{\rho} \equiv \mathcal{T}^{-1}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\rho(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

($\overline{\rho}$, очевидно, есть *обычное* среднее). Вкупе с (4) это значит, что необходимым условием является

$$|\overline{\rho}| \lesssim \mathcal{T}^{-d} \qquad \text{при} \quad \mathcal{T} \lesssim \mathcal{T}_R. \tag{11}$$

Верно ли неравенство (4) за пределами двумерного конформно-тривиального случая неизвестно, но вот (11) определенно нарушается даже и в этом случае [16].

Пример 4. Рассмотрим двумерное пространство де Ситтера. При подходящем выборе координат u, v (покрывающих *все* пространство) метрика в области $W = \{\epsilon < \operatorname{arctg} e^{2v} < \operatorname{arctg} e^{2u} < \frac{\pi}{2} - \epsilon\}$ примет вид

$$\mathrm{d}s^2 = \alpha^2\sinh^{-2}(u-v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

ТЭИ безмассового скалярного поля в состоянии конформного вакуума, ассоциированного с так записанной метрикой [9]

$$T_{vv} = T_{uu} = -\tfrac{1}{12\pi}, \qquad T_{uv} = \tfrac{1}{12\pi}\sinh^{-2}(u-v).$$

Пусть γ — сегмент времениподобной геодезической, заданный условием

$$v + u = 0, \quad t \in [t_1, t_2], \qquad t \equiv \tfrac{1}{2}(v-u).$$

Потребуем, обеспечив этим, в частности, $\gamma \subset W$, чтобы

$$\tfrac{1}{2}\ln\tan\epsilon < t_1 < t_2 \ll -1.$$

Плотность энергии, измеренная наблюдателем с мировой линией γ, будет

$$\rho = T_{\hat{0}\hat{0}} = 2(T_{uu} - T_{uv})(\alpha^2 \sinh^{-2}(u-v))^{-1} \approx -\frac{\sinh^2(u-v)}{6\pi\alpha^2},$$

откуда

$$-\overline{\rho} = \frac{\mathcal{T}^{-1}}{6\pi}\int_{t_1}^{t_2} \alpha^{-1}\sinh(u-v)\,\mathrm{d}t \approx \frac{\mathcal{T}^{-1}}{24\pi}\alpha^{-1}e^{-2t_1}.$$

В то же время

$$\mathcal{T} = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha\sinh^{-1}2t\,\mathrm{d}t \approx \alpha\int_{2t_1}^{2t_2} e^s\mathrm{d}s \approx \alpha e^{2t_2}.$$

Таким образом,

$$\overline{\rho} = -\tfrac{1}{24\pi}e^{2(t_2-t_1)}\mathcal{T}^{-2}, \qquad \mathcal{T} \ll \mathcal{T}_R = \alpha,$$

что очевидно нарушает (к тому же сколь угодно сильно при достаточно малых ϵ и t_1) неравенство (11).

3.4 „Экономные“ лазы

Даже если плотность энергии экзотического вещества $\rho \sim -1$, отсюда в общем случае все еще не следует (8). Дело в том, что V, на самом деле, не обязательно должен быть $\gtrsim l^2$.

Пример 5. „Портал“. Введем две положительные константы, ρ_0, и η_ε, связанные требованием $\rho_0 \gg \eta_\varepsilon^2$, и две функции — произвольную гладкую четную функцию $\varepsilon(\eta)$ со свойством $\operatorname{supp}\varepsilon = (-\eta_\varepsilon, \eta_\varepsilon)$ и ρ, определенную равенством

$$\rho(\eta,\psi) \equiv \rho_0 - \eta^2\cos 2\psi.$$

Рассмотрим пространство-время

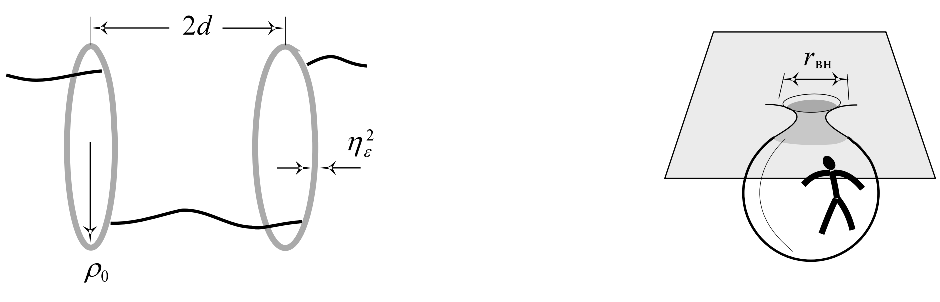
$$\begin{gathered} \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + 4(\varepsilon^2+\eta^2)(\mathrm{d}\eta^2 + \eta^2\mathrm{d}\psi^2) + \rho^2\mathrm{d}\phi^2, \\ \eta, \rho \geqslant 0, \qquad \phi = \phi + 2\pi, \quad \psi = \psi + 2\pi. \end{gathered} \tag{12}$$

(подразумевается, что точки с $\eta = 0$, различающиеся только значением ψ, отождествляются, так же как и точки с $\rho = 0$, различающиеся только значением ϕ). Чтобы увидеть структуру этого пространства-времени (подробнее см. [1]), заметим, что при $\eta > \eta_\varepsilon$ метрика имеет вид

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2 \mathrm{d}\phi^2,$$

где $z \equiv \eta^2 \sin 2\psi$. Поскольку $z(\psi) = z(\pi{+}\pi)$, можно представить пространство (12), как результат следующей хирургии. Возьмем два экземпляра Евклидова пространства $\mathbb{E}^3$ и вырежем из каждого по диску $\mathcal{D}$ радиуса ρ_0. Склеим теперь эти разрезанные пространства: левый берег каждого разреза отождествляется с правым берегом другого. Получившееся пространство (на самом деле, это просто двулистное накрытие $\mathbb{E}^3 - \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} = \mathrm{Bd}\,\mathcal{D}$) сингулярно, т. к. мы вынуждены удалить точки ветвления $\mathbb{S}$ (в них теряется структура хаусдорфова многообразия). Оказывается, однако, что если должным образом искривить его метрику в полнотории (толщины η_ε^2 в нашем случае), окружающем $\mathbb{S}$, то указанная сингулярность *устранима*. В пространство можно вклеить окружность так, что оно станет полно. Это и будет сечение $t = const$ пространства-времени (12).

Чтобы получить из (12) лаз, достаточно удалить по полупространству — скажем, $z > d$ и $z < -d$ — из каждого листа, а появившиеся границы склеить. Результат показан на рис. 3(а).



(а) (б)

Рис. 3: (а) „Портал". Два серых кольца, на самом деле, представляют собой *единый* полноторий. Верхняя толстая кривая непрерывна. Нижняя — является нестягиваемой петлей. (б) „Карман Ван Ден Брука". СЭУ нарушается только в горловине (более темный участок).

Макроскопическое тело может пройти сквозь портал с $\rho_0 \sim l/2$ при том, что область ненулевой кривизны в таком портале имеет объем $V \sim$

πl (я выбрал $\eta_\varepsilon \sim 1$). Даже если она вся заполнена экзотическим веществом планковской плотности, то $|E^-_{\rm tot}|$ при $l \sim 1$ м составит $\sim 5 \times 10^{27}$ кг. Хотя это и очень большая величина, она все же на 35 порядков (!) меньше той, что предсказана (8) и составляет „всего лишь“ $\sim 2 \times 10^{-3} M_\odot$.

Следует также отметить, что лаз, пригодный для транспортировки макроскопических тел не обязан *сам* быть макроскопическим, обстоятельство позволяющее, в принципе, уменьшить $E^-_{\rm tot}$ еще на 35 порядков. Дело в том, что даже очень большой объем может быть ограничен сферой очень маленькой площади. Например, в пространстве, показанном на рис. 3(б) область заполненная экзотическим веществом — это сферический слой радиуса $r_{\text{вн}}$. И какою бы большой ни была область с пассажиром, $r_{\text{вн}}$ может оставаться микроскопическим [17]. Можно, в частности потребовать $r_{\text{вн}} \sim 1$. Для удержания от схлопывания такого „кармана“ достаточно, оказывается, всего $E^-_{\rm tot} \sim -10^{-3}$ г экзотической материи [1].

Список литературы

[1] *S. Krasnikov.* Phys. Rev. D. 2003. V. 67. 104013.

[2] *M. Alcubierre.* Class. Quantum Grav. 1994. V. 11. L73.

[3] *S. Krasnikov.* Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 4760.

[4] *С. Хокинг, Дж. Эллис.* Крупномасштабная структура пространства-времени. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. [S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. The Large scale structure of spacetime. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.]

[5] *M. S. Morris and K. S. Thorne.* Am. J. Phys. 1988. V. 56. P. 395.

[6] M. Visser. Lorentzian wormholes — from Einstein to Hawking. New York: AIP Press, 1995.

[7] *J. L. Friedman, K. Schleich, and D. M. Witt.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1486.

[8] *А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, В. М. Мостепаненко.* Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях. М.: Энергоатомиздат, 1988. [English transl.: A. A. Grib, S. G. Mamayev, and V. M. Mostepanenko. Vacuum Quantum Effects in Strong Fields. St.Petersburg: Friedmann Laboratory Publishing, 1994.]

[9] *Н. Биррелл, П. Девис*. Квантованные поля в искривленном пространстве-времени. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. [N. D. Birrell and P. C. W. Davies. Quantum Fields in Curved Space. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.]

[10] *L. H. Ford and T. A. Roman*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 4277; *L. H. Ford and T. A. Roman*. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 2082.

[11] *L. H. Ford and T. A. Roman*. Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 5496.

[12] *L. H. Ford, M. J. Pfenning, and T. A. Roman*. Phys. Rev. D. 1998. V. 57. P. 4839.

[13] *D. N. Vollick*. Phys. Rev. D. 2000. V. 61. 084022; *É. É. Flanagan*. ibid. 2002. V. 66. 104007.

[14] *C. J. Fewster*. Phys. Rev. D. 2004. V. 70. 127501.

[15] *M. J. Pfenning and L. H. Ford*. Class. Quantum Grav. 1997. V. 14. P. 1743; *A. E. Everett and T. A. Roman*. Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 2100.

[16] *S. Krasnikov* Электронный препринт gr/qc-0409007.

[17] *C. Van Den Broeck*. Class. Quantum Grav. 1999. V. 16. P. 3973.